Working Paper Series in Young Scholar Training Program

Reconsidering Mathematics Instruction of Function from a Psychological Perspective:

Investigation of Developmental Process of Understanding Function Concept in Elementary School Children and Implication for Educational Practice

Tomoyo Yoshida

The University of Tokyo

April, 2022

No. 42

東京大学大学院教育学研究科附属 学校教育高度化・効果検証センター

Center for Advanced School Education and Evidence-Based Research

Graduate School of Education

The University of Tokyo

Center for Advanced School Education and Evidence-based Research
Graduate School of Education, The University of Tokyo
Working Paper Series in Young Scholar Training Program No.42, 2022

算数科における関数指導を心理学的観点から問い直す:

－児童の関数概念に関する理解の発達過程の解明と教育実践への示唆－

吉田 知世（東京大学）

Reconsidering Mathematics Instruction of Function from a Psychological Perspective:

Investigation of Developmental Process of Understanding Function Concept in Elementary School Children and Implication for Educational Practice

Tomoyo Yoshida

The University of Tokyo

Authors' Note

Tomoyo Yoshida is a Ph.D. Student, Graduate School of Education, The University of Tokyo.

This research was supported by a grant, Young Scholar Training Program from Center for Advanced School Education and Evidence-Based Research (CASEER), Graduate School of Education, The University of Tokyo

Abstract

The purpose of this study was to investigate the formation process of function concepts in elementary school children. The subjects were 313 elementary school children from third to sixth grades. Two kinds of tasks were administered, finding the concret value and explaining the relation between two variables. The results showed that the function concept formation was progressed before learning about function in elementary school and moreover it was progressed because of learning about function, other contents, or their everyday ecperience. Concretely, the understanding about variables which is one of the important point of function concept was progressed and the mathematical knowledge was combined with other concret daily knowledge which is relateted in each problem situation.
Keywords：function concept, understanding, developmental process, elementary school children

算数科における関数指導を心理学的観点から問い直す:

児童の関数概念に関する理解の発達過程の解明と教育実践への示唆

1 問題と目的

身の回りの自然現象や社会現象の中には, 関数関係を内包するものが多く存在する。変化する 2 つの量の関数関係を調べ, 利用することで, 未知の部分を予測することができる (熊倉, 2003)。現代の算数・数学教育において, 関数は中心的な位置を占めてきたが (三輪, 1974), 多くの子どもが関数概念の理解に困難さを呈するという現状がある (e.g., 国立教育政策研究所, 2014)。

それでは, なぜ多くの子どもにとって関数概念の理解は難しいのだろうか, どのような点で難しいのだろうか。認知発達の視点から児童期における関数概念に関する理解の発達過程について検討することでそれらの問題を解明し, 小学校算数授業における初期段階の関数指導を問い直すことが本論文の目指すところである。

1.1 子どもの関数概念に関する理解の発達

1.1.1 認知発達研究における先行研究

認知発達研究では, 関数の中でも特に比例に焦点が当てられて多くの研究が行われてきた。例えば, Inhelder&Piaget (1955) は, 以下の 6 つの比例概念の発達段階を見出した。6 つの発達段階とは, 行為と外的過程との未分化 (3－5 歳), 1 つの次元の役割の認識 (5－7 歳), 1 つまたは 2 つの次元の役割の認識 (7,8 歳), 2 つの次元の定性的対応 (9, 10 歳), 計量的比例に関する法則の発見 (11, 12 歳), 計量的比例に関する法則の説明・一般化 (13 歳－) である (藤村, 1997)。ただし, これは子どもの言語的説明に依拠した分析から見出された段階であり, Inhelder&Piaget (1955) の方法論の妥当性が議論された。それ以降の複数の研究では, 小問に対する正答パターンによる分析 (Siegler, 1981) など, 方法論が改善されたが, 比例概念の発達は小学校中学年頃に出現することが示されている。

比例概念の発達に関する先行研究では, 用いられた方法論は研究によって異なるものの, それらの研究で検討されてきたのは 1 区間 (2 点間) における数的関係の認識である。1 区間で成り立つ数的関係が認識されても, その数的関係を他の区間でも適用すること (関数の連続性の理解) が困難であることを示した先行研究 (草野,1997) もあることから, 関数概念の理解の発達を検討するためには, 1 区間の数的関係のみならず, 2 つの変数間の数的関係の理解の検討が必要である。具体的には, 従来の研究では, 1 組の値 (x_1,y_1) ともう 1 組の一方の値 (x_2) を提示した上で, もう一方の値 (y_2) を求める課題形式であったが, 本研究では, 1 組の値 (x_1,y_1) と比例定数 (a) を提示した上で, $(x_2,y_2),(x_3,y_3), \cdots,(x_\mathrm{n},y_\mathrm{n})$ の値の変化を説明させる形式の調査課題 (成立根拠説明課題) を作成する。

また, 小学生では比例や一次関数などの線形的な関数が主に扱われるが, 二次関数や指数関数などの非線形的な関数も扱われる中学生以上では, 指数関数的変化の事象に対して比例的推理を誤って適用してしまうという比例的推理の過剰適用の問題 (e.g., Van Dooren et al., 2004) が指摘されている。そのため, 本研究の調査課題では, 線形的で, かつ分離量の関数に限定するが, 比例定数が 1 である関数と 2 以上である関数, 増加関数と減少関数のように, 複数の種類の関数を扱う

ことで，比例以外の関数についての検討と，関数の種類による差異の検討を行う。

1.1.2 数学教育研究における先行研究

一方，数学教育研究では，関数関係の記述の質を分析することで，2 つの変数間の関数関係の理解が検討されてきた。例えば，Stephens et al., (2017) では，次の 11 つの関数関係の記述が精緻化されていく段階を見出した。11 の段階とは，関数の思考に関わる記述がない段階 (L0) から 1 変数の具体値や規則を記述する段階 (L1－2)，共変関係を記述する段階 (L3), 1 組や 2 組以上の具体値，文字式，言葉の式を用いて対応関係を記述する段階 (L4－10) であり，L10 の出現は 10, 11 歳頃から出現するとした。これは，認知発達研究における比例概念の理解の出現時期と類似している。なお，関数関係には共変関係と対応関係の 2 つがあり，共変関係とは 2 変数の変化量の関係で，比例$y = 4x$ を例にすれば「xが 1 増えるとyは 4 増える」といった関係のことであり，対応関係とは 2 変数の値の関係で，比例$y = 4x$ を例にすれば「xを 4 倍した数がyになる」といった関係のことである。

1.1.3 先行研究による結果の差異

問題解決過程では，問題事象から 2 つの変数を抽出しそれらを対応づけ，どのような数的関係が成り立つのか考察し，それを利用して解決するという過程を経る。比例概念や，より一般的に関数概念に関する理解は小学校中学年頃に出現することを示す先行研究が多い一方で，「2 つの変数」の数的関係の考察の前段階となるような 2 つの変数の抽出と対応づけが，12，13 歳でも困難であることを示した先行研究 (二澤，2020) もある。それらの違いは，次のように課題の質が異なり，それによって測っているものも異なるからだと考えられる。これまで多くの先行研究では Stephens et al., (2017) と同様に，2 つの変数の数値を表により提示した上で，表の 2 つの変数の間にどのような関数関係があるかを問う課題を用いており，2 つの変数の抽出と対応づけについて過大評価していた可能性が考えられる。

それでは本当に変数の抽出と対応づけは，小学校段階では難しく，中学校以降で関数に関する学習が進むことでできるようになるのだろうか。変数の抽出と対応づけとは，言い換えれば，関数関係の定性的な理解，あるいは因果性の理解であると考えられる。認知発達研究では，関数関係の定性的な理解に関しては，日常経験を通して幼児期から発達することが示されており (Resnick & Singer, 1993; Ebersbach & Wilkening, 2007)，また，因果性の理解に関しても，小学校中学年頃発達することが示されている (岸田, 1976)。

以上の先行研究を踏まえれば，二澤 (2020) で用いられた課題では，関数概念に関する理解の自生的な発達を十分に検討できていなかった可能性が考えられる。具体的には，二澤 (2020) で用いられた課題は，コップの中に水を流し入れる場面のような問題事象の図を提示した上で，関数関係にある 2 つの変量の名称を穴埋め形式で解答する形式であり，無回答が多く見られたことから，問題文の読解や解答の記述が難しかった可能性が考えられる。また，穴埋め形式の場合，無回答であった児童の認知面の特質を十分に検討することは困難である。

そのため，本研究では，兄弟の学年の変化など子どもたちにとってより身近な事象を図と表で提示して，自分の考えを自由に記述させる形式で調査課題を作成するとともに，調査課題実施時には自分の考えの記述を促す教示を行う。また，特に小学校中学年頃では言語発達が記述の質に影響を与える可能性も考えられるが，言葉に限らず

絵や図などを用いて自由に記述させ, 分析の際にはそれらの多様な表現形式による記述を評価することで, その問題に対処することができると考えられる。以上の点に留意して調査課題の作成および調査実施を行うことで, 子どもの関数概念の理解に関する自生的な発達を検討するとともに, 関数関係を捉えた記述をしていない児童がどのような認知的特質を有するかを検討することができると考えられる。

1.2 本研究の目的

本研究の目的は，横断的な検討により，児童期における関数概念に関する理解の発達過程を解明し，その理解深化の促進という観点から，小学校算数授業における関数指導のあり方を問い直すことである。

調査で用いる課題は以下の 2 つである。1 つ目は, 従来の先行研究でも用いられてきた「求値課題」であるが, 表と図の 2 種類の課題提示方法の課題を用意した。2 つ目は，先行研究ではほとんど検討されてこなかった関数概念の重要な要素の一つである変数性に関する理解について検討するために用意した, 関数関係とそれが成り立つ理由を問う「成立根拠説明課題」である。

上記の目的に対して，以下の 2 つの仮説を設定した。第一に，関数関係の定性的な理解 (Resnick & Singer, 1993; Ebersbach & Wilkening, 2007) と因果性の理解 (岸田, 1976) の発達により，関数について未習の 3, 4 年生で関数概念が形成され始め (仮説 1-1), その形成は加法的構造, 乗法的構造の順に, そして増加関数, 減少関数の順に見られること (仮説 1-2) が予測される。

第二に, 表やグラフを用いて関数の数的関係について学習されることで, 関数関係を捉える知識枠組みが問題事象の日常的な意味にもとづくものから数的なものへと変化する(仮説 2-1) とともに, 変数性に関する理解の点において関数概念の理解深化が見られる (仮説 2-2) ことが予測される。

2 方法

2.1 対象者

調査対象者は，茨城県内の公立小学校 3～6 年生(3 年生 89 名，4 年生 90 名，5 年生 93 名，6 年生 85 名)とした。ただし，2 日間の調査のいずれかを欠席した者など, データに不備のあった者を除外した。その結果，分析対象者の人数は，3 年生 74 名，4 年生 82 名，5 年生 84 名，6 年生 73 名であった。調査実施時点で，関数に関する内容について，3，4 年生は未習であり，5，6 年生は 4，5 年で既習であった。

2.2 調査実施時期

2021 年 10 月 5 日から 15 日にかけて，各学級で 2 日間に分けて課題を実施した。所要時間は事前説明を含めて 1 日約 20 分であり，2 日間合わせて約 40 分であった。

2.3 調査課題

調査課題は，求値課題 (大問 2，3，5，6) と成立根拠説明課題 (大問 1, 4) の 2 種類計 6 問から構成され，大問 1，2，3 を 1 日目，大問 4，5，6 と後述の任意課題 1，2 (5，6 年生のみ) を 2 日目に実施した。ただし，求値課題 (4 問) は，2 量の数量関係を表により提示する課題 (表提示, 2 問) と，2 量の数量関係を図により提示する課題 (図提示, 2 問) の 2 種類の課題提示方法を用意した。また，2 日目には課題への回答に慣れ，3，4 年生に比べて 5，6 年生では，解答時間が余る児童が多く存在すると想定されたため, 5, 6 年生の 2 日目では，大問 5 および大問 6 の後に，解答時間に余裕のある児童が任意に取り組む任意課題をそれぞれ 1 問ずつ用意した。

表 1　調査課題の内容

課題	関数の数学的構造		具体的な問題事象		数値設定
求値課題	加法	増加 $y=x+b$	学年の変化	A 兄弟	(x_1, y_1)=(3, 1)，x_2=5
				B 姉妹	(x_1, y_1)=(4, 1)，x_2=6
		減少 $y=-x+b$	物の譲渡	A ソーセージ	(x_1, y_1)=(4, 1)，x_2=2
				B ナタデココ	(x_1, y_1)=(5, 2)，x_2=3
	乗法	増加 $y=ax+b$	複数個入りの物の購入数と所持数	A パン, シール	a=2，(x_1, y_1)=(0, 6)，x_2=2
				B 菓子, カード	a=3，(x_1, y_1)=(0, 9)，x_2=2
		減少 $y=-ax+b$	抽選応募回数と応募マーク（シール）の枚数	A ノート, マーク	a=3，(x_1, y_1)=(0, 10)，x_2=2
				B 飲み物, シール	a=3，(x_1, y_1)=(0, 11)，x_2=2
		増加 $y=ax$	行列の人数と所要時間（※5, 6 年生，任意）	A クレープ	$(x_1,\ y_1)$=(4, 6)，x_2=10
				B アイス	$(x_1,\ y_1)$=(5, 6)，x_2=8
成立根拠説明課題	加法	減少 $y=-x+b$	物の譲渡	ナルト	(x_1, y_1)=(6, 1)，x_2提示せず
	乗法	増加 $y=ax+b$	複数個入りの物の購入数と所持数	カードパック	a=5，(x_1, y_1)=(0, 3)，x_2提示せず

2.3.1　求値課題

1 組の 2 量 $(x_1,\ y_1)$ ともう 1 組の一方の量 (x_2) を表または図により提示し，もう一方の量 (y_2) を予測させた後，その理由を説明させた。表 1 に示すように，4 種類 (任意課題を含めると 5 種類) の数学的構造をもつ関数について，構造は同一で数値設定や登場人物の名前などが異なる問題事象をそれぞれ 2 問ずつ (A，B) 作成し，2 種類の課題提示方法を用いた。また，課題提示順序 (表→図，図→表) と 問題事象(A，B) を各学年でカウンターバランスした。

2.3.2　成立根拠説明課題

課題を文章で提示し，2 量の関数関係について記述させた後，その関係が成り立つ理由を言葉や絵，図，式を用いて説明させた。成立根拠説明課題では，例題とその模範解答を提示することで，児童が解答しやすくなるよう工夫した。調査実施時間を考慮し，表 1 に示す 2 種類の数学的構造の課題を用意した。

2.4　手続き

課題は学級単位で実施した。まず，各児童の学年，組，番号が印刷された課題冊子を配布した後，調査者が解答時間や注意事項などについて説明を行った。次に，大問ごとに時間を区切って各 5 分間で実施し，早く終わっても次に進んだり前に戻ったりしないよう指示した。2 日目も 1 日目と同様の手続きで調査を実施した。

3　結果

分析については，以下の 2 つの手順で進める。まず，求値課題および成立根拠説明課題における判断や理由づけに関する記述の分析から，関数概念の理解の発達について全般的傾向を明らかにする。次に，各課題の記述の質的分析により，関数概念の発達における認知面の特質を明らかにする。

3.1　求値課題

3.1.1　全般的傾向

求値課題の加法的構造と乗法的構造の課題 (各 4 問) において，判断 (答えの数値) の適切性について正答数を求め，学年別の人数分布を表 2 に示す。表 2 より，加法的構造と乗法的構造の両方で天井効果が見られたため，全問正答であるかどうかに着目して分析を行うことにした。

まず，χ^2検定 (両側検定) を用いて，全問正答

者の比率を学年間で比較したところ，加法と乗法の両方で学年間の差が有意であった。Bonferroni 法を用いて多重比較を行った結果，加法では 3 年—6 年 (p<.05)，乗法では 3 年—4, 5, 6 年 (3 年—4 年: p<.01; 3 年—5 年: p<.01; 3 年—6 年: p<.01) の学年間の差が有意であった。

次に，McNemar 検定を用いて，学年ごとに課題間で全問正答者の比率を比較したところ,すべての学年で課題間の差が有意であり (3 年: p<.01; 4 年: p<.05; 5 年: p<.01; 6 年: p<.05)，乗法に比べて加法の全問正答者が多かった。

続いて，判断が正しく，かつ理由づけが適切な解答を正答の基準とし,より厳しい基準を用いて関数概念の理解の発達について検討を行った。なお，2 変数の共変関係や対応関係 (数的関係) や，それらの数的関係の日常的な意味について,言葉や図，絵，表，式のいずれかの表現形式で記述している解答を,適切な理由づけであると判断した。基準設定の理由は，子どもにとって 1 変量 (従属変数) の規則性の記述は容易であるが，2 変量 (独立変数と従属変数) の関数関係の記述は難しく (English & Warren，1998)，その記述の質をみることにより関数概念の理解を検討することができると考えたからである。各課題における正答率の変化を図 1 に示す。

学年 (3, 4, 5, 6) ×数学的構造 (加法, 乗法) の 2 要因分散分析を行ったところ，学年の主効果)，数学的構造の主効果，学年×数学的構造の交互作用が有意であった (学年の主効果: F(3,309)=30.216, p<.01, ηp^2=0.227, 1-β=1; 数学的構造の主効果: F(1,309)=198.678, p<.01, ηp^2=0.391, 1-β=1; 学年×数学的構造の交互作用: F(3,309)=6.239, p<.01, ηp^2=0.05, 1-β=0.999)。

有意性を示した学年×数学的構造の交互作用について単純主効果検定を行った結果,学年の単純主効果は加法と乗法の両方で有意であった (加法: F(3,309)=12.369, p=.000, ηp^2=0.107; 乗法: F(3,309)=32.033, p=.000, ηp^2=0.237)。Bonferroni

表 2　求値課題における正答数（判断のみ）に関する人数分布（学年間の比較）

学年 ＼ 数学的構造	加法的構造						乗法的構造					
	4問	3問	2問	1問	0問	計	4問	3問	2問	1問	0問	計
3年	56	11	7	0	0	74	28	21	14	7	4	74
4年	72	9	1	0	0	82	60	12	7	2	1	82
5年	76	5	2	0	1	84	63	14	4	1	2	84
6年	68	5	0	0	0	73	60	7	5	1	0	73
計	272	30	10	0	1	313	211	54	30	11	7	313
学年間の比較	χ^2検定 (両側検定)											
検定結果	p=.009						p=.000					
下位検定	3年—6年 (p=.043)						3年—4年 (p=.000) 3年—5年 (p=.000) 3年—6年 (p=.000)					

表 3　求値課題における正答数（判断のみ）に関する人数分布（課題間の比較）

加法 ＼ 乗法	3年			4年			5年			6年		
	0-3問	4問	計	0-3問	4問	計	0-3問	4問	計	0-3問	4問	計
0-3問	16	2	18	5	5	10	5	3	8	3	2	5
4問	30	26	56	17	55	72	16	60	76	10	58	68
計	46	28	74	22	60	82	21	63	84	13	60	73
課題間の比較	McNemar検定											
検定結果	p=.000			p=.017			p=.004			p=.039		

法を用いて多重比較を行った結果，加法では 3 年—4, 5, 6 年，4 年—6 年の学年間の差が有意であり (3 年—4 年: p<.01; 3 年—5 年: p<.01; 3 年—6 年: p<.01; 4 年—6 年: p<.05)，乗法ではすべての学年間の差が有意であった (3 年—4 年: p<.01; 3 年—5 年: p<.01; 3 年—6 年: p<.05; 4 年—5 年: p<.01; 4 年—6 年: p<.01; 5 年—6 年: p<.05)。また，数学的構造の単純主効果はすべての学年で有意であった (3 年：$F(1, 309)$ =90.612, p<.01, ηp^2 =0.227; 4 年：$F(1, 309)$ =74.375, p<.01, ηp^2 =0.194; 5 年：$F(1, 309)$ =38.496, p<.01, ηp^2 =0.111; 6 年：$F(1, 309)$ =15.246, p<.01, ηp^2=0.047)。

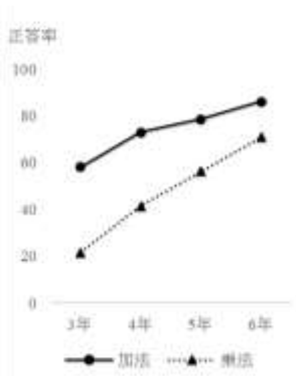

図 1　求値課題における正答率（判断と理由づけ）の変化

以上の判断の適切性のみの緩い基準と，判断と理由づけの適正性の厳しい基準を用いた 2 つの分析結果から，3 年とその他の学年との間に有意な差が見られるが，特に厳しい基準を用いた分析では，加法と乗法の両方の課題において，関数について未習の 3 年と 4 年の間に有意な差が見られること，乗法の課題において，関数について同一の学習経験をもつ 5 年と 6 年の間にも有意な差が見られることが明らかになった。また，加法的構造の概念形成は乗法的構造の概念形成より先行することが示された。

3.1.2 各小問の分析

求値課題の加法的構造と乗法的構造の課題には，図提示と表提示の 2 種類，増加関数と減少関数の 2 種類の課題があり，計 4 問の小問が含まれた。そのため，学年間や課題間の差について小問ごとに検討するために，先の分析と同様に，判断が正しく，かつ理由づけが適切な解答を正答の基準として，各小問の通過率を求めた。図提示課題における各小問の通過率の変化を図 2，表提示

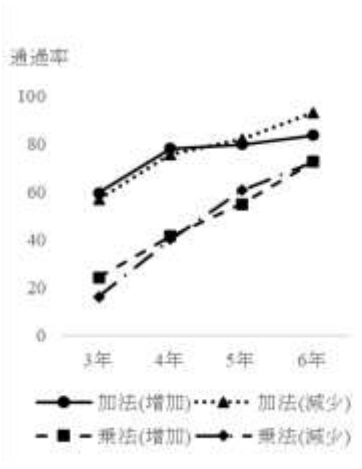

図 2　求値課題（図提示）における通過率（判断と理由づけ）

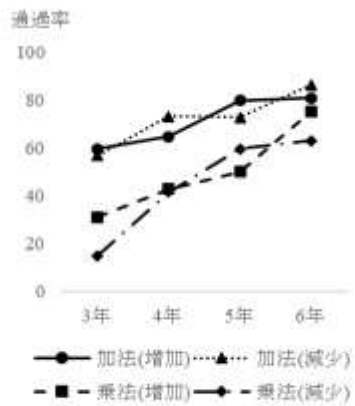

図 3　求値課題（表提示）における通過率（判断と理由づけ）

課題における各小問の通過率の変化を図 3 に示す。

χ^2検定 (両側検定) を用いて，各小問の通過率を学年間で比較したところ，図提示のすべての小問で学年間の差が有意であった (加法 (増加): *p*<.01; 加法 (減少): *p*<.01; 乗法 (増加): *p*<.01; 乗法 (減少): *p*<.01)。Bonferroni 法を用いて多重比較を行った結果，加法 (増加) では 3 年—6 年 (*p*<.05)，3 年—5 年 (*p*<.10)，加法 (減少) では 3 年—5 年 (*p*<.01)，3 年—6 年 (*p*<.01)，4 年—6 年 (*p*<.05)，乗法 (増加) では 3 年—5 年 (*p*<.01)，3 年—6 年(*p*<.01)，4 年—6 年 (*p*<.01)，乗法 (減少) では 3 年—4 年 (*p*<.01)，3 年—5 年 (*p*<.01)，3 年—6 年 (*p*<.01)，4 年—6 年 (*p*<.01)の学年間の差が有意あるいは有意傾向であった。

また，表提示においてもすべての小問で学年間の差が有意であった (加法 (増加): *p*<.01; 加法 (減少): *p*<.01; 乗法 (増加): *p*<.01; 乗法 (減少): *p*<.01)。多重比較を行った結果，加法 (増加) では 3 年—6 年(*p*<.05)，3 年—5 年 (*p*<.05)，加法 (減少) では 3 年—6 年 (*p*<.01)，乗法 (増加) では 3 年—6 年(*p*<.01)，4 年—6 年 (*p*<.01)，5 年—6 年 (*p*<.05)，乗法 (減少) では 3 年—4 年 (*p*<.01)，3 年—5 年 (*p*<.01)，3 年—6 年 (*p*<.01)，4 年—6 年 (*p*<.10) の学年間の差が有意あるいは有意傾向であった。

以上より，加法的構造と乗法的構造の両方で増加関数の概念形成の時期が 5 年であるのに対し，減少関数の概念形成の時期が 6 年であることが示された。

3.2 成立根拠説明課題

分析に先立ち，成立根拠説明課題における関数関係に関する記述について，2 変数の関数関係 (共変関係または対応関係) を記述している回答を「通過」として児童の解答を分類した。

まず，加法 (減少) の課題において，通過者の人数分布 (表 4) に学年間の差が見られるか検討するためにχ^2検定を行ったところ，学年間の差が有意であった (*p*<.01)。Bonferroni 法を用いて多重比較を行った結果，3 年—5, 6 年，4 年—6 年の学年間の差が有意であった。乗法 (増加) の課題においても同様に分析を行ったところ，学年間の差が有意であった (*p*<.01)。多重比較を行った結果，3 年—4, 5, 6 年，4 年—6 年の学年間の差が有意であった。

加法 (減少) の課題における非通過者につい

表 4 成立根拠説明課題における関数関係の記述の有無に関する人数分布

	加法的構造					乗法的構造				
	3年	4年	5年	6年	計	3年	4年	5年	6年	計
通過	12	22	33	41	108	23	47	63	61	194
非通過	62	60	51	32	205	51	35	21	12	119

表 5 成立根拠説明課題における非通過者の記述の内容に関する人数分布

	数+意味	1変数	具体値	均等	その他	計
3年	5	15	8	19	15	62
4年	8	16	7	13	16	60
5年	15	19	7	2	8	51
6年	16	6	2	3	5	32
計	44	56	24	37	44	205

て記述の内容を分析したところ,「たけおがしげるに 1 個あげると, たけおは 1 個減って, しげるは 1 個増える」のように共変関係に関する数的関係とその日常的な意味が関連づけられた解答 (数+意味), 「たけおは 1 個あげるから 1 個減る」のように 1 変数の規則性のみ記述している解答 (1 変数),「たけおは 5 個, しげるは 2 個になる」のように具体値を記述している解答 (具体値),「たけおとしげるの個数を合わせると 7 個だから 3 個と 4 個に分けられる」のように均等配分の考えを記述している解答 (均等),「増える」のように定性的な変化のみを記述している解答や不完全な解答, 無回答など (その他) の 5 つに分類された (表 5)。

χ^2検定 (両側検定) を用いて, 非通過者の記述の内容に関する人数分布を学年間で比較したところ, 学年間の差が有意であった ($\chi^2(12)=39.810, p<.01$)。残差分析の結果, 3 年では「均等」, 5 年では「1 変数」, 6 年では「数+意味」が多い一方で, 3, 4 年では「数+意味」, 5 年では「均等」が少なかった。

次に, 加法 (減少) の課題における 2 変数の関数関係を記述している通過者 (3 年 12 名, 4 年 22 名, 5 年 33 名, 6 年 41 名)を対象にして, 関数関係の成り立つ理由に関する記述を分析したところ, 2 変数の変化量の意味について言及している解答 (「意味」) と 2 変数の具体的な数値とその値が得られる式のみを記述している解答 (「数」) の 2 つに分類された。理由づけの内容の人数分布 (表 6) に学年間の差が見られるか検討するために Fisher の直接確立計算法 (両側検定) を行ったところ, 学年間に有意な差はなかった (*n.s.*)。乗法 (増加) の課題においても同様に, 2 変数の関数関係を記述している通過者 (3 年 23 名, 4 年 47 名, 5 年 63 名, 6 年 61 名) 理由づけの内容の人数分布について同様に分析したところ, 学年間に有意な差はなかった (*n.s.*)。

次に, 1 区間で成り立つ数的関係を他の区間に適用することの困難さ (草野, 1997) について検討するために, 2 変数の関数関係を記述している通過者を対象にして, 問題文で提示している値以外の具体値を 2 組以上提示している解答 (「2 組以上」) と 1 組のみ提示している解答 (「1 組」) に分類した (表 7)。後者に比べて前者では, 変数性の理解がより深いと判断できる。そこで, 加法 (減少) の課題において変数性の理解に学年の差

表 6　成立根拠説明課題における関数関係の成り立つ理由の内容に関する人数分布

	加法的構造					乗法的構造				
	3年	4年	5年	6年	計	3年	4年	5年	6年	計
意味	8	13	24	30	75	14	34	45	48	141
数	4	9	9	11	33	9	13	18	13	53
計	12	22	33	41	108	23	47	63	61	194

表 7　成立根拠説明課題における具体値の組合せの記述数に関する人数分布

	加法的構造					乗法的構造				
	3年	4年	5年	6年	計	3年	4年	5年	6年	計
2組以上	2	5	12	18	37	15	27	49	47	138
1組	10	17	21	23	71	8	20	14	14	56
計	12	22	33	41	108	23	47	63	61	194

が見られるか検討するために Fisher の直接確立計算法 (両側検定) を行ったところ，学年間の差は有意でなかった (*n.s.*)。乗法 (増加) の課題においても同様に分析したところ, 学年間の差は有意傾向だった (p<.10)。参考までに Bonferroni 法を用いて多重比較を行った結果, 各学年間に特徴的な差はなかった。

以上より, 通過者の記述の内容に関する人数分布に学年間の差はないこと, 関数についての学習が進むにつれて，2 変数の具体値の組合せや 1 変数の規則性から変化量の関係へと認識が変わり，さらに変数性の理解が深まること, それらの数的関係に関する知識が日常的な意味と関連づけられていくことが示唆された。

4 考察

以上の結果から，仮説の検証を行った後，総合考察，教育実践への示唆，今後の課題について述べていく。

4.1 仮説の検証

まず，仮説 1-1「関数について未習の 3, 4 年生で関数概念が形成され始める」は，求値課題の判断と理由づけの適正性の厳しい基準を用いた分析において，加法と乗法の両方の課題において，関数について未習の 3 年と 4 年の間に有意な差が見られたことから支持された。また，仮説 1-2「概念形成は加法的構造，乗法的構造の順に，そして増加関数，減少関数の順に見られる」は，加法的構造と乗法的構造の両方で増加関数の概念形成の時期が 5 年であるのに対し，減少関数の概念形成の時期が 6 年であることから支持された。

仮説 2-1「関数関係を捉える知識枠組みが問題事象の日常的な意味にもとづくものから数的なものへと変化する」は，通過者の記述の内容に関する人数分布に学年間の差がなかったことから支持されなかった。また，仮説 2-2 (変数性に関する理解の点において関数概念の理解深化が見られる) は，2 組以上の具体値を記述した者と 1 組の具体値のみを記述した者との人数分布について, 加法的構造の課題では学年間の差がなかったが, 乗法的構造の課題では有意傾向であったことから部分的に支持された。ただし，非通過者の記述の内容の分析から, 関数についての学習が進むにつれて，2 変数の具体値の組合せや 1 変数の規則性から変化量の関係へと認識が変わっていくことが示唆された。

4.2 総合考察

本研究の結果から示された関数概念の理解に関する発達的変化は大まかに以下の通りである。3 年では，1 組の具体値や 1 変数の規則性を認識しているが，関数について未習であっても 4 年では，2 変数の関数関係を認識する子どもが出現し始める。さらに，関数について学習が進むにつれて，2 変数の関数関係を認識する子どもが漸進的に増加するとともに, 関数概念の重要な要素の一つである変数性に関する理解が深まり, その数的関係に関する知識が問題事象の日常的な意味と関連づけられていく。

4.3 教育実践への示唆

現行の学習指導要領では関数について学習が始まるのは 4 年であるが，本研究では，それ以前から自生的に発達してきている関数概念の理解について明らかにした。そのような自生的な発達を考慮して教育内容や教育方法を検討することが有効ではないかと考えられる。具体的には，1 変数の規則性を認識しており，2 変数の関数関係の認識が難しい者や，2 組の具体値や 2 変数の関数関係の日常的な意味を認識しており，変化量 (共変関係) や対応関係の認識が難しい者など，

関数について学習する以前の段階で子どもによって認識が多様であるため, 各児童がもつ既有知識を新しい知識との関連づけを促すような指導が重要であると考えられる。

4.4 今後の課題

本研究は横断的な検討であるため, 判断や理由づけの学年間の差が何によるものであるのか, 関数以外の算数の学習単元に関する学習経験による影響が大きいのか, それともその他の教科の学習経験や日常経験による影響が大きいのかは明らかにすることができなかった。今後, 半年ごとの縦断的な検討などを行うことで, より詳細な発達的変化とその要因を明らかにすることができると考えられる。

引用文献

Ebersbach, M., & Wilkening, F. (2007). Children's Intuitive Mathematics: The Development of Knowledge About Nonlinear Growth. *Child Development*, *78*(1), 296–308. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.00998.x

English, L. D. & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. M*athematics Teacher*, *91*(2), 166-170.

Inhelder, B.& Piaget, J. (1955) *De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescent*. Presses Universitaires de France.

岸田 秀 (1976). ピアジェ　子どもの因果関係の認識　明治図書

国立教育政策研究所 (2014). 平成 26 年度全国学力・学習状況調査報告書中学校数学　国立教育研究所

熊倉啓之 (2003). 学ぶ意義を実感させる関数の指導に関する研究　日本数学教育学会誌, *85*(1), 40-49. https://doi.org/10.32296/jjsme.85.11_40

草野 収 (1997). 算数における式をよむ活動についての一考察　上越数学教育研究, *12*, 81-92.

三輪辰郎 (1974). 関数的思考　中島健三・大野清四郎 (編)　現代教科教育学体系 4, (pp. 210-225)　第一法規出版

二澤善紀 (2020). 算数・数学における関数概念の認識発達を培う理論と実践　ミネルヴァ書房

Resnick, L. & Singer, J. (1993). Proto-quantitative origins of ratio reasoning. T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg, (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 107-130). Routledge.

Siegler. R. S. (1981). Developmental sequences within and between concepts. *Monographics of the Societ for Research in Child Development*, 189.

Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., & Gardiner, A. M. (2017). A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*. *19*(3), 143-166. http://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: A teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction*, *14*(5), 485–501. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.019

東京大学大学院教育学研究科附属学校教育高度化・効果検証センター
Center for Advanced School Education and Evidence-Based Research,
Graduate School of Education, The University of Tokyo
WEBSITE（日本語）: http://www.schoolexcellence.p.u-tokyo.ac.jp/
WEBSITE（English）: htttp://www.schoolexcellence.p.u-tokyo.ac.jp/en/

CASEER